

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-62/71 (1962)

A. Massarotti, M. Puglisi: FONDAMENTI DELLA TEORIA NON LINEARE  
DEGLI AUTOOSCILLATORI.

Estratto da: Alta Frequenza, 31, 434 (1962)

# FONDAMENTI DELLA TEORIA NON LINEARE DEGLI AUTO-OSCILLATORI

A. MASSAROTTI - M. PUGLISI (\*)

*Viene studiato il funzionamento in regime transitorio degli auto-oscillatori di tipo RC ed LC. La teoria svolta, che risulta in buon accordo con le verifiche sperimentali, si applica a tutti i casi nei quali sia possibile scomporre l'oscillatore in questione in una rete passiva costituita da elementi lineari ed in un amplificatore che ha guadagno variabile con la tensione. Sono riportate le formule risolutive relative a molti casi pratici.*

## I. - INTRODUZIONE.

Ci proponiamo di dare alcune regole per il calcolo del tempo di salita, dell'ampiezza e della frequenza della tensione di regime d'un autooscillatore.

Lo studio degli autooscillatori si presenta sempre particolarmente complesso, in quanto la non linearità dei circuiti attivi che ne fanno parte è essenziale nella determinazione della tensione di regime e pertanto, nella trattazione teorica del problema, non si può prescindere dal tener conto di questo fatto.

Un autooscillatore è in generale un circuito formato da elementi attivi e passivi nel quale però non è sempre possibile, senza discostarsi troppo dalla realtà, operare sezionamenti in modo da ottenere un certo numero di circuiti elementari indipendenti, analizzabili separatamente.

Fortunatamente tutti i casi in cui si può operare questa suddivisione sono i casi di maggior interesse. Schematizziamo allora l'autooscillatore con tre circuiti:

a) una rete elettrica reale composta da elementi lineari passivi;

b) un amplificatore con guadagno dipendente dalla tensione di ingresso o di uscita;

c) un circuito di reazione.

Il circuito che ne risulta è quello di fig. 1, e su questo circuito dovranno ora essere precisate le ipotesi che si fanno su ogni elemento che lo compone.

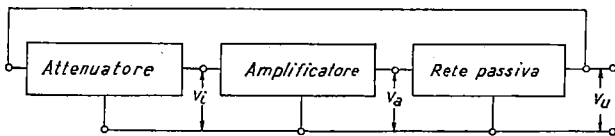


Fig. 1.

Vogliamo sottolineare che in questo modo noi possiamo analizzare il comportamento del circuito dal punto di vista della risposta in ampiezza, oltre che della risposta in frequenza, introducendo nella caratteristica di guadagno dell'amplificatore la non linearità in funzione dell'ampiezza del segnale d'ingresso indipendentemente dalla frequenza.

La letteratura in questo campo è diffusa per quanto riguarda la risposta in frequenza a regime, ma molto meno per l'analisi in ampiezza. In genere nei lavori di

elettronica in campo non lineare è stata introdotta la non linearità tenendo conto direttamente della caratteristica dei tubi elettronici e approssimandola in vari modi, per esempio con l'equazione di Vallauri. Nel nostro caso abbiamo preferito usare la caratteristica di un amplificatore in quanto questa è misurabile direttamente e dipende oltre che dalle caratteristiche dei tubi usati anche dai circuiti associati all'amplificatore stesso, quali ad esempio quelli di polarizzazione; pertanto essa rende conto in maniera più esatta e più sintetica del comportamento dell'amplificatore, che, per quanto riguarda questo lavoro, non è importante analizzare in se stesso. Dell'amplificatore è sufficiente conoscere, come meglio vedremo in seguito, la caratteristica di guadagno in funzione dell'ampiezza del segnale d'ingresso, sotto certe condizioni non molto restrittive, che preciseremo in seguito, per quanto riguarda la risposta in frequenza.

## 2: - IPOTESI DI CALCOLO.

Assumiamo le seguenti condizioni:

a) le impedenze di ingresso e di uscita dell'attenuatore tendono ad infinito;

b) le tensioni di ingresso e di uscita dell'attenuatore sono legate tra loro da una costante di proporzionalità  $K$  reale;

c) l'amplificatore ha impedenza d'ingresso tendente ad infinito ed impedenza d'uscita tendente a zero;

d) il guadagno dell'amplificatore è esprimibile mediante una funzione della tensione di ingresso del tipo

$$(1) \quad G = G(V_i)$$

e) la banda passante dell'amplificatore è sempre supposta infinita;

f) la rete passiva è composta da elementi lineari.

Potrebbe a prima vista sembrare che le ipotesi fatte siano estremamente restrittive. Questo in realtà non è e lo chiariremo meglio in seguito. Esaminiamo le ipotesi fatte.

Per quanto riguarda la a) e la b) si può dire che è abbastanza facile realizzare un attenuatore ad alta impedenza d'ingresso e di uscita e che non introduca rotazioni di fase. Inoltre in molti casi non è nemmeno necessario introdurre l'attenuatore, in quanto  $V_i$  viene prelevata in un punto interno alla rete passiva. Riguardo al punto c) la limitazione è solo apparente, in quanto l'impedenza effettiva d'uscita dell'amplificatore può essere conglobata nell'impedenza di ingresso della rete passiva, per cui l'amplificatore può essere effettivamente considerato avente impedenza d'uscita tendente a zero a tutti gli effetti del calcolo. Infine sui punti d) ed e) osserviamo che la banda passante potrebbe essere veramente una limitazione essenziale. Si deve però tener presente che nei casi pratici gli autooscillatori vengono usati per generare o oscillazioni sinusoidali o oscillazioni a rilassamento. Nel primo caso l'oscillatore lavora entro una stretta banda di frequenze, centrate attorno ad un certo valore e nel secondo

(\*) Dr. A. MASSAROTTI e Dr. Ing. M. PUGLISI, Laboratori Nazionali di Frascati del C.N.E.N.,

caso le frequenze in gioco sono quelle determinate dalla forma dei fronti d'onda e dal periodo di ripetizione. Facendo l'ipotesi che la banda passante dell'amplificatore sia infinita, si possono scrivere in modo relativamente semplice le equazioni del circuito e valutarne gli autovalori, dando eventualmente anche soluzioni approssimate. Perchè queste soluzioni siano valide è allora necessario e sufficiente che l'amplificatore reale che fa parte del circuito, abbia in pratica una banda passante abbastanza grande nell'intorno di ciascun autovalore considerato.

Possiamo quindi concludere che le ipotesi fatte non ci portano troppo lontano dalla realtà fisica ed è sufficiente tenere presente il loro significato per poter valutare correttamente le grandezze numeriche da misurare per ottenere la soluzione numerica desiderata.

### 3. - L'EQUAZIONE GENERALE.

Consideriamo lo schema di fig. 1 e supponiamo di sconnettere l'amplificatore dalla rete passiva. Supponiamo poi di connettere alla rete stessa un generatore ideale di tensione che eroghi una tensione  $V(t) = V_a'$ . In queste condizioni e con le ipotesi fatte la tensione di uscita  $V_u$  è data dalla soluzione dell'equazione caratteristica della rete. Questa equazione nella sua forma più generale è

$$(2) \quad \sum_0^n a_j \frac{d^j V_u}{dt^j} = \sum_0^m b_i \frac{d^i V_a'}{dt^i}$$

D'altra parte, ricordando la (1), possiamo scrivere:

$$(3) \quad V_a(t) = K V_u G(K V_u)$$

e d'altra parte, per le ipotesi fatte

$$(4) \quad V_a(t) = V_a'(t).$$

Possiamo quindi sconnettere il generatore di tensione e riconnettere l'amplificatore alla rete passiva. Sostituendo allora la (3) nella (2) troviamo l'equazione differenziale cercata:

$$(5) \quad \sum_0^n a_j \frac{d^j V_u}{dt^j} - K \sum_0^m \alpha_i \frac{d^i [V_u G(K V_u)]}{dt^i} = 0.$$

È ovvio che i valori di  $n$  ed  $m$  sono definiti dalla particolare rete in esame.

### 4. - CASO DEL CIRCUITO CON UNA COSTANTE DI TEMPO E GUADAGNO LINEARMENTE VARIABILE CON L'AMPIEZZA.

Sia  $g$  l'impedenza d'uscita dell'amplificatore e supponiamo che la rete passiva sia costituita da un circuito RC. Avremo allora lo schema di fig. 2.

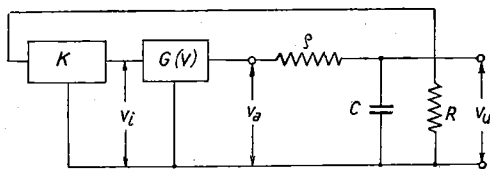


Fig. 2.

L'equazione (2) in questo caso è:

$$(6) \quad \dot{V}_u + \frac{g+R}{gRC} V_u = \frac{V_a}{gC}$$

Se facciamo l'ipotesi che il guadagno dell'amplificatore vari linearmente con la tensione, la (1) assume la forma

$$(7) \quad G = G_0 + \beta V_i.$$

Tenendo presente la (3), la (5) diventa allora con facili passaggi:

$$(8) \quad \dot{V}_u + (p-q) V_u = \alpha V_u^2$$

con 
$$p = \frac{g+R}{gRC} \quad q = \frac{KG_0}{gC} \quad \alpha = \frac{\beta K^2}{gC}$$

È molto interessante discutere a fondo questo caso per le deduzioni qualitative che se ne possono trarre, pur avendo assunto una forma di guadagno che è certamente priva di significato fisico, come chiariremo meglio in seguito. La trattazione analitica è estremamente semplice e ciò permette di non perdere di vista l'obiettivo fondamentale e cioè l'analisi del circuito.

La soluzione dell'equazione (8) è:

$$(9) \quad V_u(t) = \frac{1}{\left( \frac{1}{V_{u0}} - \frac{\alpha}{p-q} \right) e^{(p-q)t} + \frac{\alpha}{p-q}}$$

con  $V_{u0}$  tensione all'istante 0. Osserviamo che  $p$  e  $q$  hanno le dimensioni dell'inverso d'un tempo e sono sempre positivi, mentre  $\alpha$  ha le dimensioni dell'inverso d'un tempo ed è positivo o negativo a seconda che  $\beta$  sia positivo o negativo e cioè a seconda che il guadagno cresca o decresca all'aumentare, per valori positivi, della tensione. Discutiamo ora in dettaglio i sei casi che si possono presentare assumendo sempre  $V_{u0} > 0$ .

$$a) \quad \begin{cases} p-q < 0 \\ \alpha < 0 \end{cases}$$

La prima condizione significa che il guadagno iniziale è maggiore dell'attenuazione totale e la seconda che il guadagno diminuisce al crescere della tensione. In questo caso per  $t \rightarrow \infty$  si raggiunge una tensione di regime

$$V_{u\infty} = \frac{p-q}{\alpha} > 0.$$

Si hanno poi quattro sottocasi e cioè:

- I)  $V_{u0} > V_{u\infty}$  e al crescere di  $t$ ,  $V_u$  diminuisce con andamento monotono con  $V_u \rightarrow V_{u\infty}$  per  $t \rightarrow \infty$ .
- II)  $V_{u0} = V_{u\infty}$  e al crescere di  $t$  tutto rimane invariato.
- III)  $V_{u0} > V_{u\infty} \cong \frac{V_{u\infty}}{2}$  e al crescere di  $t$ ,  $V_u$  cresce con andamento monotono con  $V_u \rightarrow V_{u\infty}$  per  $t \rightarrow \infty$ .
- IV)  $V_{u0}/2 > V_{u0} > 0$  e al crescere di  $t$ ,  $V_u$  cresce volgendo la concavità verso l'alto fino a che

$$t < \frac{1 - \ln \frac{V_{u\infty}}{V_{u0}}}{p-q} ; \text{ per } t = \frac{1 - \ln \frac{V_{u\infty}}{V_{u0}}}{p-q}$$

vi è un punto di flesso e per

$$t > \frac{1 - \ln \frac{V_{u\infty}}{V_{u0}}}{p-q}$$

$V_u$  cresce con andamento monotono e concavità rivolta verso il basso con  $V_u \rightarrow V_{u\infty}$  per  $t \rightarrow \infty$ .

In fig. 3 sono riportati i quattro possibili andamenti della  $V_u$  ora discussi.

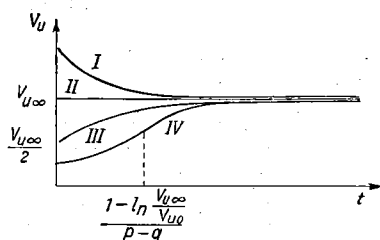


Fig. 3.

$$b) \begin{cases} p - q < 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

La prima condizione è identica a quella del caso precedente, mentre la seconda indica che il guadagno è costante.  $V_u$  cresce esponenzialmente al crescere di  $t$  con  $V_{u\infty} = \infty$ .

$$c) \begin{cases} p - q < 0 \\ \alpha > 0 \end{cases}$$

Al solito la prima condizione è rimasta invariata, mentre la seconda indica che il guadagno aumenta all'aumentare della tensione. In questo caso per  $t \rightarrow \infty$  si raggiunge

una tensione di regime  $V_{u\infty} = \frac{p-q}{\alpha} < 0$ .

Si vede subito che per qualunque valore iniziale  $V_{u0}$  la  $V_u(t)$  tende a crescere monotonicamente per

$$t < \frac{1}{p-q} \ln \frac{-V_{u0}}{V_{u\infty} - V_{u0}}$$

Per  $t = \frac{1}{p-q} \ln \frac{-V_{u0}}{V_{u\infty} - V_{u0}} \quad V_u = + \infty$

e infine per  $t > \frac{1}{p-q} \ln \frac{-V_{u0}}{V_{u\infty} - V_{u0}}$

$V_u$  varia da  $-\infty$  a  $V_{u\infty}$  monotonicamente.

L'andamento di  $V_u$  è riportato in fig. 4.

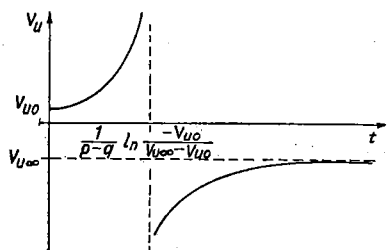


Fig. 4.

Chiaramente una situazione di questo genere è paradossale ed è inutile discuterla perchè dal punto di vista fisico non può esistere un amplificatore che eroghi una tensione infinita e per di più abbia guadagno infinito, mentre dal punto di vista matematico è elementare che l'andamento della funzione  $V_u(t)$  sia quello descritto.

$$d) \begin{cases} p - q > 0 \\ \alpha \leq 0 \end{cases}$$

La prima condizione significa che il guadagno iniziale è minore dell'attenuazione totale; la seconda che il guadagno diminuisce o resta invariato all'aumentare della tensione. Si vede subito che per  $t \rightarrow \infty$ ,  $V_u \rightarrow 0$  qualunque sia  $V_{u0}$ , con andamento monotono.

$$e) \begin{cases} p - q > 0 \\ \alpha > 0 \end{cases}$$

Anche in questo caso l'attenuazione totale è maggiore del guadagno iniziale, ma il guadagno aumenta all'aumentare della tensione. Si hanno tre sottocasi possibili e cioè:

I)  $V_{u0} < \frac{p-q}{\alpha}$  e allora per  $t \rightarrow \infty$   $V_{u0} \rightarrow 0$  monotonicamente

II)  $V_{u0} = \frac{p-q}{\alpha}$  e in questo caso  $V_u(t) = V_{u0}$  per qualunque  $t$

III)  $V_{u0} > \frac{p-q}{\alpha}$  infine in questo caso si ha che  $V_u$  cresce monotonicamente per

$$t < \frac{1}{p-q} \ln \frac{\alpha V_{u0}}{\alpha V_{u0} - p + q};$$

raggiunge il valore  $V_u = \infty$  per

$$t = \frac{1}{p-q} \ln \frac{\alpha V_{u0}}{\alpha V_{u0} - p + q};$$

varia monotonicamente da  $-\infty$  a 0 per

$$t > \frac{1}{p-q} \ln \frac{\alpha V_{u0}}{\alpha V_{u0} - p + q}$$

L'andamento di  $V_u$  in questi tre casi è riportato in fig. 5.

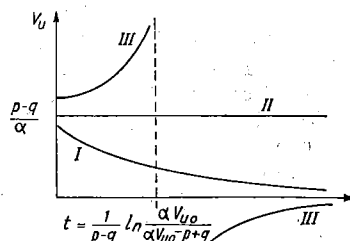


Fig. 5.

Questo caso, al solito, non è fisicamente possibile, ma è interessante perchè ci mostra che, se l'attenuazione totale è maggiore del guadagno iniziale, e il guadagno, in un amplificatore reale, aumenta all'aumentare della tensione fino a un certo valore prima di cominciare a decrescere, esiste un valore di soglia, della tensione iniziale, al di sopra del quale l'oscillazione si innesca. Notiamo che questo è proprio il caso che schematizza una valvola polarizzata sotto l'interdizione per cui il guadagno iniziale è nullo fino a un certo valore della tensione d'innesco, mentre poi, al di sopra della tensione di soglia, che è grosso modo uguale alla differenza tra la tensione di polarizzazione e quella di interdizione, è crescente.

$$f) \begin{cases} p - q = 0 \\ \alpha \leq 0 \end{cases}$$

Questo è il caso in cui l'attenuazione totale è uguale al guadagno iniziale.

Con queste condizioni la (9) assume la forma

$$(10) \quad V_u(t) = \frac{I}{\frac{I}{V_{u0}} - \alpha t}$$

e si hanno tre sottocasi:

I)  $\alpha > 0$ . La  $V(t)$  sale monotonicamente a  $\infty$  che viene raggiunto per  $t = \frac{I}{\alpha V_{u0}}$ . Per  $t > \frac{I}{\alpha V_{u0}}$  varia monotonicamente da  $-\infty$  a 0 che viene raggiunto per  $t \rightarrow \infty$ .

II)  $\alpha = 0$ , è  $V(t) = V_{u0} = \text{costante}$ .

III)  $\alpha < 0$  e  $V(t)$  scende monotonicamente a 0 che raggiunge per  $t \rightarrow \infty$ .

I diagrammi di  $V(t)$  sono riportati in fig. 6.

Se la  $V_{u0} \leq 0$  basta cambiare il segno di  $\beta$  e si trovano i casi analoghi a quelli per  $V_{u0} \geq 0$  che hanno per diagrammi le curve a simmetria speculare rispetto all'asse  $t$  delle curve già trovate.

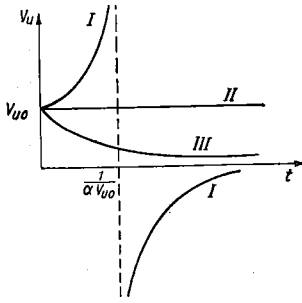


Fig. 6.

Dall'esempio che abbiamo discusso in tutti i suoi possibili casi, possiamo trarre delle conclusioni generali che sono valide anche nei casi più complessi.

1) Il diminuire del guadagno all'aumentare della tensione è la causa che provoca la stabilizzazione dell'ampiezza della tensione d'uscita a un certo valore.

2) L'ampiezza della tensione di regime dipende solo dalle caratteristiche del circuito e non dalla tensione iniziale.

3) Esistono casi particolari in cui è necessario che la tensione iniziale sia superiore a un certo valore di soglia perchè il processo rigenerativo si possa innescare.

4) Gli oscillatori, in senso lato, alla cui rete passiva compete una sola costante di tempo e sono fisicamente realizzabili hanno una risposta monotona e  $G(V)$  è una funzione monodroma.

### 5. - LA FUNZIONE $G(V_i)$ PER GLI AMPLIFICATORI REALI.

Dall'esempio discusso s'è visto che la conoscenza della funzione  $G(V_i)$  è essenziale per poter schematizzare correttamente un amplificatore reale; non solo, ma le difficoltà di carattere matematico che s'incontrano nella soluzione dell'equazione caratteristica (6), per quanto riguarda i circuiti con una costante di tempo, e più in generale della (5), sono strettamente legate alla maggiore o minore semplicità della  $G(V_i)$  che, come abbiamo detto, rappresenta il guadagno in funzione della tensione. È evidente che, in generale, una volta che si sappia risolvere il problema quando  $G(V_i)$  è rappresentato nel piano  $G, V_i$ , da una retta è possibile risolvere lo stesso proble-

ma quando  $G(V_i)$  è rappresentato da una qualunque funzione monodroma che può essere rappresentata mediante un numero finito  $n$  di segmenti di retta.

È sufficiente per questo calcolare il valore di  $V(t_m)$  e assumerlo come condizione iniziale della  $m+1$ esima equazione della retta che rappresenta il guadagno, e calcolare quindi  $V(t_{m+1})$  e così via per  $m$  intero e definito:  $0 \leq m \leq n-1$ . Naturalmente più grande è  $n$ , maggiore è l'approssimazione.

Questo modo di procedere però sarebbe molto laborioso se pur semplice in linea di principio. Quello che noi ci proponiamo di fare è di verificare se esistono delle funzioni algebriche che possano, con buona approssimazione, rappresentare la funzione  $G(V_i)$  e risolvere in questi casi particolari la relativa equazione differenziale. Nella peggiore delle ipotesi potremo ottenere una buona approssimazione della  $G(V_i)$  usando al massimo due o tre archi di curve diverse spezzando così la risoluzione del problema in due o tre parti al massimo. Prima però di vedere quali sono le curve da prendere in considerazione, vogliamo fare un'importante precisazione, per quanto ovvia, sulla curva di guadagno di un amplificatore reale. Noi abbiamo postulato l'amplificatore come a sé stante e separato e separabile dalla rete passiva che lo carica. Questo è lecito se noi consideriamo l'amplificatore come un generatore di tensione agli effetti della impedenza d'uscita, infatti abbiamo conglobato l'impedenza d'uscita dell'amplificatore stesso nella rete passiva. Riferendoci quindi alle solite notazioni, in pratica noi non possiamo costruire la curva  $G(V_i)$  misurando  $V_i$  e  $V_a$ , ma dobbiamo costruirla misurando  $V_i$  e  $V_u$  e quindi, la curva così ottenuta dipende dalla rete passiva. È però possibile, eseguendo per esempio due serie di misure con una rete passiva nota, costruire la curva di guadagno indipendente dalla rete passiva fino a che non vengano in qualche modo variate le condizioni di lavoro dell'amplificatore reale mediante l'inserzione della rete passiva con la quale si deve lavorare. Anche in quest'ultimo caso con due serie di misure fatte con la stessa rete si risale alla curva di guadagno che però è valida solo quando l'amplificatore è connesso alla rete in esame.

Un'altra precisazione da fare è che quando si considerano oscillatori in regime sinusoidale la misura dinamica del guadagno conduce con buona approssimazione a una curva di guadagno equivalente simmetrica rispetto all'asse  $G$ , mentre questo non è più in generale lecito nei casi in cui si abbiano oscillazioni a rilassamento.

In quest'ultimo caso si può decidere solo volta per volta se l'approssimazione del guadagno simmetrico sia lecita oppure se è sufficiente definire il guadagno per tensioni d'ingresso solamente positive o solamente negative.

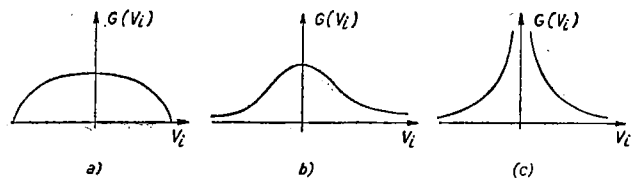


Fig. 7.

In fig. 7 sono riportate alcune curve che possono dare buone approssimazioni e precisamente:

$$(11) \quad a) \quad G = G_0 - \beta V_i^2$$

per  $-\sqrt{G_0/\beta} < V_i < +\sqrt{G_0/\beta}$

$$(12) \quad b) \quad G = \frac{G_0}{1 + \beta V_i^2}$$

per  $\infty < V_i < \infty$

$$(13) \quad c) \quad G = \frac{\beta}{V_i^2}$$

per  $-\infty < V_i < 0$  oppure  
 $0 > V_i > +\infty$

In fig. 8 sono invece riportati tre casi di curve di gua-

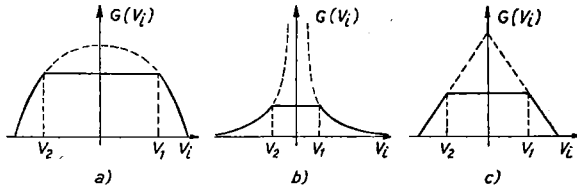


Fig. 8.

dagno composte da un tratto di curva a guadagno costante e da un tratto di un'altra curva e precisamente:

$$(14) \quad G = G_0$$

per  $V_2 \leq V_i \leq V_1$

$$G = G_0 - \beta V_i^2$$

per  $-\sqrt{G_0/\beta} < V_i \leq V_2$   
e  $V_1 \geq V_i > +\sqrt{G_0/\beta}$

$$(15) \quad G = G_0$$

per  $V_2 \leq V_i < V_1$

$$G = \frac{G_0}{V_i^2}$$

per  $-\infty < V_1 \leq V_2$  e  $V_1 \leq V_i < +\infty$

$$(16) \quad G = G_0$$

per  $V_2 \leq V_i \leq V_1$

$$G = G_0 - \beta V_i$$

con  $\beta V_i > 0$

per  $-\frac{G_0}{\beta} < V_i \leq V_2$  e  $V_1 \leq V_i < \frac{G_0}{\beta}$

Discuteremo ora in dettaglio alcuni casi particolari.

#### 6. - CALCOLO DELLA TENSIONE DI REGIME E DEL TEMPO DI SALITA.

Abbiamo visto che la (5) è l'equazione differenziale che interpreta il funzionamento di un autooscillatore nel caso più generale; l'ordine di questa equazione e il suo tipo sono completamente specificati quando si conoscono la natura della rete passiva e la caratteristica  $G(V_i)$  dell'amplificatore. Noi ci occuperemo dettagliatamente di alcuni processi non divergenti. In altre parole ci occuperemo di processi in cui il livello continuo varia per valori finiti dal livello iniziale a un livello finale di regime oppure, nel caso di tensioni alternate, di processi in cui l'ampiezza dell'involuppo delle tensioni di picco raggiunge per valori finiti un valore di regime. Si potrà quindi per ogni oscillatore definire una tensione di regime  $V_{u\infty}$  continua o alternata che noi calcoleremo e, in qualche caso, anche una pulsazione di regime.

Chiaramente i processi divergenti non hanno alcun significato fisico. Definiamo poi il tempo di salita, come quel tempo che occorre perchè la tensione passi dal valore iniziale  $V_{u0}$  al valore di  $0,9 V_{u\infty}$ . Questo tempo, ov-

viamente, dipende anche dalle condizioni iniziali. Nel calcolo del tempo di salita bisogna tener presente che la prima parte della curva di guadagno potrebbe anche essere crescente o costante e dar luogo quindi a un processo divergente (cfr. par. 4 e); in casi di questo genere bisogna spezzare il problema in almeno due parti e cioè:

a) calcolo della  $V_u(t)$  per cui si passa al tratto di curva di guadagno decrescente e del tempo necessario a raggiungerla;

b) calcolo della  $V_{u\infty}$  e della  $V_u(t)$  assumendo come valore iniziale  $V_u(t_1)$  e del relativo tempo di salita; il tempo di salita effettivo è quindi dato dalla somma di  $t_1$  e  $t_2$ . Come primo esempio di calcolo riprendiamo in esame il circuito trattato al par. 4.

Per un circuito di questo tipo con un amplificatore a guadagno lineare le uniche condizioni fisicamente pensabili sono quelle del caso a). Ne scende subito ricordando la (8) e la (9)

$$(17) \quad V_{u\infty} = \frac{K G_0 R - (R + \rho)}{K^2 \beta R}$$

e la (9) può essere scritta nella forma

$$(18) \quad V_u(t) = \frac{V_{u\infty}}{1 + \left( \frac{V_{u\infty}}{V_{u0}} - 1 \right) e^{-t/\tau}}$$

$$(19) \quad \tau = \frac{\rho R C}{K G_0 R - (\rho + R)}$$

Dalla definizione che abbiamo dato per il tempo di salita si ricava subito:

$$(20) \quad \Delta t = \tau \ln 9 \left( \frac{V_{u\infty}}{V_{u0}} - 1 \right)$$

che è valida per  $V_{u0} \leq 0,9 V_{u\infty}$  e che dà, come ovvio  $\Delta t = 0$  per  $V_{u0} = 0,9 V_{u\infty}$ . Da questa formula risulta pure che  $\tau$  dà un'indicazione sulla maggiore o minore rapidità di andata a regime del circuito; ma che il tempo di salita dipende in maniera essenziale da  $V_{u0}$ , come avevamo detto. Nel caso di  $V_{u0} > V_{u\infty}$  si può definire un tempo di discesa a regime in maniera del tutto analoga assumendo che questo sia il tempo che occorre perchè la tensione passi dal valore  $V_{u0}$  al valore  $1,1 V_{u\infty}$ ; in questo caso si ha:

$$(21) \quad \Delta t = \tau \ln 11 \left( 1 - \frac{V_{u\infty}}{V_{u0}} \right)$$

che è valida per  $V_{u0} \geq 1,1 V_{u\infty}$ .

#### 7. - CIRCUITI CON UNA COSTANTE DI TEMPO E GUADAGNO NON LINEARE.

a) *Caso di caratteristica parabolica.*

Ricordando la (11) e la (3) la (6) in questo caso diventa:

$$(22) \quad \dot{V}_u - \frac{K G_0 R - (\rho + R)}{\rho R C} V_u = - \frac{\beta K^3}{\rho C} V_u^3$$

la cui soluzione è:

$$(23) \quad V_u(t) = \frac{V_{u\infty}}{\sqrt{1 + \left[ \left( \frac{V_{u0}}{V_{u\infty}} \right)^2 - 1 \right] e^{-\frac{2t}{\tau}}}}$$

dove

$$(24) \quad V_{u\infty} = \sqrt{\frac{R K G_0 - (\rho + R)}{K^3 \beta R}}$$

$$(25) \quad \tau = \frac{\rho R C}{K G_0 R - (\rho + R)}$$

e con la solita definizione del tempo di salita si ha:

$$(26) \quad \Delta t = \frac{\tau}{2} \ln 4,26 \left[ \left( \frac{V_{u\infty}}{V_{u0}} \right)^2 - 1 \right]$$

che è valida per  $V_{u0} \leq 0,9 V_{u\infty}$ .

Analogamente a quanto abbiamo visto nel caso precedente anche in questo caso è definibile e facilmente calcolabile un tempo di discesa qualora  $V_{u0} > V_{u\infty}$ .

b) *Caso di caratteristica iperbolica del III ordine.*

La forma del guadagno è in questo caso data dalla (13); vogliamo sottolineare che ha senso trattare questo caso, solo in quanto esso serve a raccordare curve di guadagno che hanno un guadagno finito per tensioni molto piccole intorno al valore zero. Ricordando la (13) e la (3), la (6) assume la forma:

$$(27) \quad \dot{V}_u + \frac{\rho + R}{\rho R C} V_u = \frac{\beta}{\rho C K} \frac{1}{V_u}$$

la cui soluzione è:

$$(28) \quad V_u(t) = V_{u\infty} \sqrt{1 + \left[ \left( \frac{V_{u0}}{V_{u\infty}} \right)^2 - 1 \right] e^{-2 \frac{t}{\tau}}}$$

dove

$$(29) \quad V_{u\infty} = \sqrt{\frac{\beta R}{K(\rho + R)}}$$

e

$$(30) \quad \tau = \frac{\rho R C}{R + \rho}$$

dalla quale con le solite condizioni si ricava per il tempo di salita

$$(31) \quad \Delta t = \frac{\tau}{2} \ln 5 \left[ 1 - \left( \frac{V_{u0}}{V_{u\infty}} \right)^2 \right]$$

che, al solito, è valida per  $V_{u0} \leq 0,9 V_{u\infty}$ .

Vogliamo a questo punto chiarire che quando si abbia una curva di guadagno composta, il cui secondo tratto sia iperbolico o sia in generale rappresentato da una funzione diversa da quella che rappresenta il primo tratto, può accadere che, mentre la tensione  $V_{u\infty}$  deve essere calcolata usando la seconda caratteristica, la  $V_u(t_i)$  calcolata usando il primo tratto e che costituisce la  $V_{u0}$  e cioè la condizione iniziale dell'equazione relativa al secondo tratto di caratteristica sia  $> 0,9 V_{u\infty}$  ma  $< V_{u\infty}$ . In questo caso il valore di  $\Delta t$  viene ovviamente calcolato imponendo che  $V_u(t)$  soluzione della prima equazione sia uguale a  $0,9 V_{u\infty}$  calcolato con la seconda equazione.

c) *Caso di caratteristica del III ordine non iperbolica.*

In questo caso la forma del guadagno è dato dalla (12) e quindi ricordando la (3), la (6) assume la forma:

$$(32) \quad \dot{V}_u + \frac{\rho + R}{\rho R C} V_u = \frac{K G_0}{\beta \rho C \left( K^2 V_u^2 + \frac{1}{\beta} \right)}$$

Da questa equazione, opportunamente scritta, si possono ottenere 2 casi e cioè:

$$I) \quad G_0 K \frac{R}{\rho + R} > 1$$

$$(II) \quad G_0 K \frac{R}{\rho + R} < 1$$

poichè  $K \frac{R}{\rho + R}$  rappresenta l'attenuazione e  $G_0$  il guadagno massimo iniziale, l'oscillazione può innescare solo nel 1° caso, quindi a priori trascuriamo il 2° caso.

Nel primo caso la soluzione è:

$$(33) \quad \frac{V_{u0}}{V_u} \left( \frac{V_u^2 - V_{u\infty}^2}{V_{u0}^2 - V_{u\infty}^2} \right) = e^{-\frac{k}{2} G_0 \frac{R}{\rho + R} \left( R G_0 \frac{R}{\rho + R} - 1 \right) t} = e^{-\frac{\rho + R}{\rho R C} \left( K G_0 \frac{R}{\rho + R} - 1 \right) t}$$

con

$$(34) \quad V_{u\infty} = \sqrt{\frac{1}{\beta K^2} \left( K G_0 \frac{R}{R + \rho} - 1 \right)}$$

Non riportiamo l'espressione del tempo di salita che può però essere calcolato con facilità numericamente con le solite convenzioni. La caratteristica data è quella che meglio interpreta il comportamento degli amplificatori che più spesso si incontrano.

d) *Caratteristica iperbolica del II ordine.*

Riportiamo anche questo caso che può essere interessante per le applicazioni in cui la  $V_{u0}$  e la  $V_u$  sono entrambe sempre positive o sempre negative.

La caratteristica di guadagno per il caso di  $V_{u0}$  e  $V_u$  sempre positiva è:

$$(35) \quad G(V_i) = \frac{\gamma}{V_i - \beta}$$

e presenta una singolarità per  $V_i = \beta$  e inoltre non è simmetrica rispetto all'asse  $G$ . Quindi analogamente a quanto s'è visto nel caso b) questo caso può essere applicato solo quando  $V_i > \beta$  o in connessione ad altre curve di guadagno che portino a raggiungere una tensione iniziale di ingresso che soddisfi alle condizioni date quando la curva di guadagno considerata viene ad essere interessata dal fenomeno.

In questo caso la (6), sempre ricordando la (3) assume la forma:

$$(36) \quad \dot{V}_u + \frac{\rho + R}{\rho R C} V_u = \frac{\gamma K}{\rho C} \frac{V_u}{K V_u - \beta}$$

la cui soluzione, sotto le condizioni dette, è

$$(37) \quad \frac{V_u - V_{u\infty}}{V_{u0} - V_{u\infty}} \left( \frac{V_u}{V_{u\infty}} \right) = e^{-\frac{\rho + R}{R} \frac{\beta}{\gamma K} t} = e^{-\frac{\rho + R}{R} \frac{1}{K} \left( \frac{\rho + R}{\rho R C} \frac{\beta}{K} + \frac{\gamma}{R C} \right) t}$$

che nel caso particolare di  $\beta = 0$  si riduce a:

$$(38) \quad V_u = V_{u\infty} + (V_{u0} - V_{u\infty}) e^{-\frac{\rho + R}{\rho RC} t}$$

In entrambi questi casi il tempo di salita è facilmente calcolabile numericamente.

Vogliamo a questo punto mettere in evidenza un fatto molto importante. Generalmente in un amplificatore reale, il guadagno in funzione della tensione, rimane costante per un certo tratto, per poi diminuire con una certa legge all'aumentare della tensione. Supponiamo allora di conoscere tutti i parametri del circuito e che il guadagno sia costante fino a che venga raggiunta una certa  $V_{ut}$ . Conosciamo quindi la relativa  $G(V_{ut})$  e qualunque sia la forma del guadagno al crescere della tensione le varie curve nel piano  $G, V$ , dovranno passare dal punto  $G(V_{ut}), V_{ut}$ .

D'altra parte se imponiamo che  $V_{u\infty}$  sia la stessa qualunque sia la forma del guadagno, ciò significa che  $G(V_{i\infty})$  è la stessa in tutti questi casi, questo ovviamente perché non variando i parametri del circuito, la condizione di equilibrio raggiunta deve essere la medesima in tutti i casi. In fig. 9 abbiamo riportato 3 curve relative allo

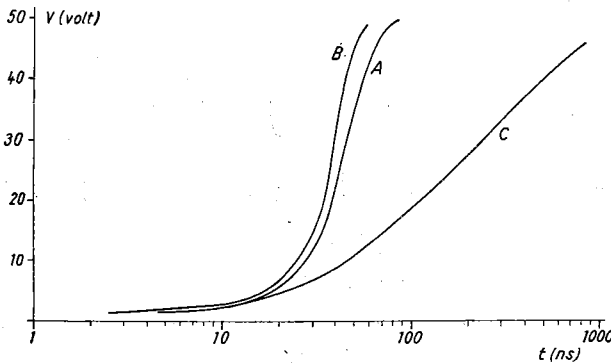


Fig. 9.

stesso circuito ma usando 3 curve di guadagno diverse e precisamente:

a) è il caso di guadagno che diminuisce linearmente le cui formule sono date dalle (7), (17), (18);

b) è il caso di caratteristica parabolica del III ordine le cui formule sono date dalla (11) e dalla (22);

c) è il caso di caratteristica non iperbolica del III ordine le cui formule sono date dalla (12) e (28).

I parametri del circuito sono:

- $R = 10 \text{ k}\Omega$
- $\rho = 1 \text{ k}\Omega$
- $C = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$
- $V_{u0} = 1 \text{ Volt}$
- $V_{u\infty} = 50 \text{ Volt}$
- $G V_0 = 10$

In fig. 10 sono riportate altre tre curve relative agli stessi casi e ricavate variando alcuni parametri del circuito, ed esattamente:

- $\rho = 100 \text{ }\Omega$
- $C = 1000 \text{ pF}$

In entrambi i casi si vede che mentre i tempi di salita corrispondenti ai casi a) e b) sono molto vicini, perché l'arco di parabola è in questo caso ben approssimato dalla retta, nel caso del guadagno del III ordine non iperbo-

lico la curva di guadagno si scosta notevolmente dalla retta e pertanto il tempo di salita è notevolmente diverso.

### 8. - CIRCUITI CON RISPOSTA OSCILLANTE.

Nel caso che la rete passiva contenga due costanti di tempo (v. fig. 11), oppure sia costituita da un circuito

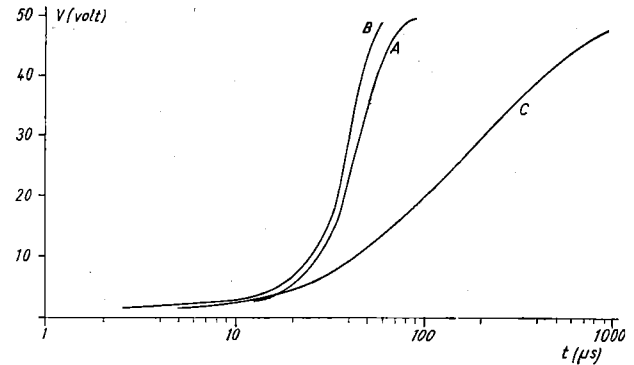


Fig. 10.

oscillante (v. fig. 12), l'equazione (5) assume la forma:

$$(39) \quad \ddot{V}_u + \left[ p - r K \left( G(K V_u) + V_u \frac{dG(K V_u)}{dV_u} \right) \right] \dot{V}_u + q V_u = 0$$

dove i simboli sono quelli fino ad ora usati e nel caso di fig. 11

$$p = \frac{(R_1 + R_2) C_1 + R_2 C_2}{R_1 R_2 C_1 C_2} \quad q = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}$$

$$r = \frac{1}{R_1 C_2}$$

mentre nel caso di fig. 12

$$p = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} \quad q = \frac{1}{LC} \quad r = \frac{1}{R_1 C}$$

In entrambi i casi  $R_1$  congloba anche l'impedenza d'uscita dell'amplificatore.

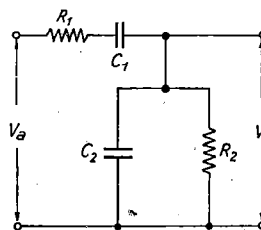


Fig. 11.

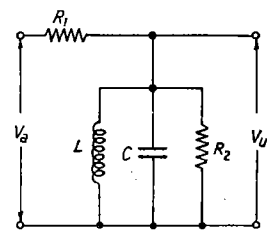


Fig. 12.

In generale un'equazione del tipo della (39) interpreta il comportamento di qualunque rete con due costanti di tempo oppure, il che è equivalente, che possa al più avere un'unica risonanza.

Nel caso più generale le equazioni di questo tipo non sono risolvibili analiticamente, ma sotto particolari con-



dizioni è possibile dare soluzioni analitiche approssimate, che interpretano abbastanza bene i casi pratici.

9. - APPLICAZIONE AL CASO DEI CIRCUITI DI FIG. 11 E 12 QUANDO LA FORMA DEL GUADAGNO È LINEARE.

Vogliamo ora esaminare in dettaglio uno dei casi particolari che si possono avere considerando la rete passiva di fig. 12.

Cominciamo col fare l'ipotesi che il guadagno sia simmetrico rispetto all'asse  $G$  e in particolare abbia una forma del tipo  $G = G_0 - \beta V_i$  con  $\beta V_i \geq 0$ . Sarà cioè  $\beta > 0$  per  $V_i > 0$  e  $\beta < 0$  per  $V_i < 0$  come riportato in fig. 13.

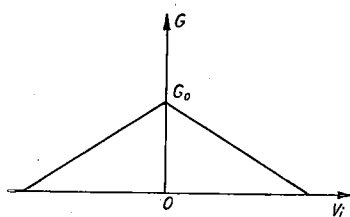


Fig. 13.

È chiaro che una forma di guadagno lineare rispecchia il caso più semplice di amplificazione non lineare.

L'equazione (39) assume allora la forma:

$$(40) \quad \ddot{V}_u + (p - r K G_0 + 2 r K^2 \beta V_u) \dot{V}_u + q V_u = 0.$$

Sostituendo la variabile  $t$  con la variabile  $\tau^* = \frac{t}{q} = \omega t$  e indicando la derivata rispetto a  $\tau^*$  con un punto come quella rispetto a  $t$ , potremo riscrivere la (40) nella forma:

$$(41) \quad \ddot{V}_u - \xi (1 - \alpha V_u) \dot{V}_u + V_u = 0$$

dove

$$\alpha = \frac{2 r K^2 \beta}{r K G_0 - p}; \quad \xi = \frac{r K G_0 - p}{\sqrt{q}} = \frac{\varepsilon}{\omega}.$$

Facciamo ora l'ipotesi che il termine non lineare

$$-\xi (1 - \alpha V_u) \dot{V}_u$$

sia relativamente piccolo. Se trascuriamo allora questo termine la soluzione dell'equazione imperturbata ci porta a scrivere la relazione

$$(42) \quad V_u = A_1 \sin \tau^* + B_1 \cos \tau^*$$

che può essere scritta:

$$(43) \quad V_u = A \sin \chi$$

$$(44) \quad \dot{V}_u = A \cos \chi$$

con  $\chi = (\tau^* + \varphi)$ .

Supponiamo ora che sia  $A$  che  $\varphi$  varino lentamente al variare del tempo e quindi di  $\tau^*$ .

Differenziando la (43) otteniamo

$$(45) \quad \dot{V}_u = \dot{A} \sin \chi + A (\dot{\tau}^* + \dot{\varphi}) \cos \chi$$

e sostituendo la (43) nella (45):

$$(46) \quad \dot{A} \sin \chi + A \dot{\varphi} \cos \chi = 0.$$

Differenziando la (44) otteniamo:

$$(47) \quad \dot{V} = \dot{A} \cos \chi - A (\dot{\tau}^* + \dot{\varphi}) \sin \chi$$

e sostituendo la (47), la (45) e la (43) nella (41) otteniamo:

$$(48) \quad \dot{A} \cos \chi - A \dot{\varphi} \sin \chi = \xi [1 - \alpha A \sin \chi] A \cos \chi$$

moltiplicando la (46) per  $\sin \chi$  la (48) per  $\cos \chi$  e sommando si ottiene:

$$(49) \quad \dot{A} = \xi [1 - \alpha A \sin \chi] A \cos^2 \chi$$

mentre moltiplicando la (46) per  $\cos \chi$ , la (47) per  $-\sin \chi$  e sommando si ottiene:

$$(50) \quad \dot{\varphi} = \frac{-\xi}{A} [1 - \alpha A \sin \chi] A \cos \chi \sin \chi.$$

Abbiamo fatto l'ipotesi che  $A$  e  $\varphi$  varino lentamente al variare di  $t$  e quindi è lecito assumere nella stessa approssimazione che  $A$  e  $\varphi$  abbiano valore medio costante per una variazione di  $2\pi$  radianti dell'angolo  $\chi$ .

Questi valori medi sono dati da:

$$(51) \quad \dot{A} = \frac{\xi}{2\pi} \int_0^{2\pi} [1 - \alpha A \sin \chi] A \cos^2 \chi d\chi$$

$$(52) \quad \dot{\varphi} = -\frac{\xi}{2\pi A} \int_0^{2\pi} [1 - \alpha A \sin \chi] A \sin \chi \cos \chi d\chi$$

e ricordiamo che  $\alpha$  cambia segno con  $V_u$  la (51) diventa

$$(53) \quad \frac{2\pi}{\xi} \frac{\dot{A}}{A} = \int_0^{2\pi} \cos^2 \chi d\chi - 2\alpha A \int_0^{\pi} \sin \chi \cos^2 \chi d\chi$$

che sviluppando dà:

$$(54) \quad \dot{A} - \frac{\xi}{2} A + \frac{2\xi\alpha}{3\pi} A^2 = 0$$

la cui soluzione, ricordando che  $\tau^* = \omega t$  e  $\xi = \frac{\varepsilon}{\omega}$  è:

$$(55) \quad A(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{A_0} - \frac{4}{3} \frac{\alpha}{\pi}\right) e^{-\frac{\varepsilon}{2} t} + \frac{4}{3} \frac{\alpha}{\pi}}$$

Dalla (52) si ha poi che in questa approssimazione  $\dot{\chi} = 0$  e quindi sostituendo la (55) nella (43):

$$(56) \quad V_u(t) = \frac{V_{u\infty}}{1 + \left(\frac{V_{u\infty}}{V_{u0}} - 1\right) e^{-t/\tau}} \sin(\omega t + \varphi)$$

con

$$V_{u0} = A_0; \quad V_{u\infty} = \frac{3}{4} \frac{\pi}{\alpha}; \quad \tau = \frac{2}{\varepsilon}.$$

Prima di discutere il risultato che abbiamo trovato, vogliamo esaminare brevemente le ipotesi che abbiamo fatto per ottenere la soluzione approssimata data.

Dire che il termine perturbativo è piccolo, significa dire che la soluzione è rappresentata da una sinusoide poco distorta. In effetti se  $\xi < 3$  la trattazione svolta è ancora valida; se invece  $\xi \geq 3$  si hanno oscillazioni notevolmente distorte che all'aumentare di  $\xi$  divengono vere oscillazioni di rilassamento; però anche in questo caso il problema può essere risolto integrando l'equazione con procedimenti grafici. La (48) ottenuta sotto queste ipotesi, rappresenta l'inviluppo dei valori di picco della tensione d'uscita in funzione del tempo e la soluzione cercata (56) è data dal prodotto di quest'ultima per un termine sinusoidale la cui pulsazione è costante in prima approssimazione.

Un fatto notevole è che la forma della (56), a parte il termine sinusoidale è del tutto simile a quella della (18) e quindi l'andamento dell'inviluppo della tensione d'uscita è del tutto simile a quello ottenuto nel caso del circuito con una sola costante di tempo. Per quanto riguarda i parametri del circuito si ha:

a) nel caso di fig. 11

$$(57) \quad V_{u\infty} = \frac{3\pi}{8} \frac{K G_0 R_2 C_1 - (R_1 + R_2) C_1 - R_2 C_2}{K^2 \beta R_2 C_1}$$

$$(58) \quad \tau = \frac{2 R_1 R_2 C_1 C_2}{K G_0 R_2 C_1 - (R_1 + R_2) C_1 - R_2 C_2}$$

$$(59) \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

b) nel caso di fig. 12

$$(60) \quad V_{u\infty} = \frac{3\pi}{8} \frac{K G_0 R_2 - (R_1 + R_2)}{K^2 \beta R_2}$$

$$(61) \quad \tau = \frac{2 R_1 R_2 C}{K G_0 R_2 - (R_1 + R_2)}$$

$$(62) \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{L C}}$$

Il calcolo del tempo di salita dell'inviluppo, si riduce quindi al calcolo già eseguito per la (18), ma con i parametri che abbiamo definito.

#### 10. - CIRCUITI CON DUE COSTANTI DI TEMPO O CON INDUTTANZA E CAPACITÀ E GUADAGNO NON LINEARE.

Tratteremo ora alcuni casi in cui il guadagno ha una forma non lineare. Il metodo per risolvere le equazioni è sempre quello che abbiamo trattato per esteso nel precedente paragrafo con le stesse ipotesi e le stesse limitazioni.

##### I) Caso del guadagno parabolico.

Con questo tipo di caratteristica dell'amplificatore, data dalla (11), la (39) diventa con le solite notazioni:

$$(63) \quad \ddot{V}_u + [p - r K G_0 + 3 r \beta K^3 V_u^2] \dot{V}_u + q V_u = 0$$

Essa è identica formalmente alla celebre equazione di Van der Pol; appare quindi evidente l'importanza della schematizzazione da noi assunta per l'autooscillatore, perchè con questa equazione si è in grado di descrivere il comportamento di un circuito che soddisfacendo alle ipotesi assunte comprende anche il caso particolare trattato da Van der Pol.

La soluzione della (63), con l'approssimazione detta, è:

$$(64) \quad V_u(t) = \frac{V_{u\infty} \text{sen}(\omega t + \varphi)}{\sqrt{1 + \left[ \left( \frac{V_{u0}}{V_{u\infty}} \right)^2 - 1 \right] e^{-\frac{2t}{\tau}}}}$$

con  $\omega = \sqrt{q}$ . I valori di  $\omega$ ,  $V_{u\infty}$  e  $\tau$  dipendono dai parametri del circuito e precisamente:

a) nel caso di fig. 11 si ha:

$$(65) \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

$$(66) \quad V_{u\infty} = 2 \sqrt{\frac{K G_0 - \left( \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} + 1 \right)}{3 K^2 \beta}}$$

$$(67) \quad \tau = \frac{2 R_1 C_2}{K G_0 - \left( \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} + 1 \right)}$$

b) nel caso di fig. 12 si ha:

$$(68) \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{L C}}$$

$$(69) \quad V_{u\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{K G_0 R_2 - (R_1 + R_2)}{\beta K^2 R_2}}$$

$$(70) \quad \tau = \frac{2 R_1 R_2 C}{K G_0 R_2 - (R_1 + R_2)}$$

Come si vede subito anche in questo caso, a parte il termine sinusoidale abbiamo trovato un'espressione uguale alla (23) dove però al solito i parametri sono quelli dianzi definiti. Prima di trattare altri casi, vogliamo però fare un'osservazione fondamentale; confrontiamo la (61) con la (19) e la (70) con la (25). In entrambi i casi l'inviluppo della tensione ai capi di un circuito oscillante, varia con un esponente doppio di quello trovato nel caso corrispondente del circuito con una sola costante di tempo. Ciò rispecchia il ben noto fatto che la risposta alla modulazione d'ampiezza in un circuito *RLC* parallelo è con buona approssimazione la stessa che dà un circuito parallelo *R2C* cui venga applicato il segnale modulante. Inoltre possiamo constatare che la (60) differisce dalla (17) per un fattore numerico 1,18, mentre la (69) differisce dalla (24) per un fattore 1,16 e quindi, per calcolare il valore di regime del picco della tensione con un'approssimazione del 10% è sufficiente calcolare il valore di regime della tensione del corrispondente caso del circuito con una costante di tempo, moltiplicandolo per un fattore 1,15. Osserviamo che questo fattore moltiplicativo varia al variare della forma della curva di guadagno ma in maniera trascurabile in rapporto alla precisione colla quale in generale può servire di calcolare il valore del picco della tensione di regime di un autooscillatore. Possiamo ora dare la formula approssimata con rete passiva di tipo *RLC* per alcuni altri casi e cioè:

##### II) Caso di guadagno iperbolico del III ordine.

$$(71) \quad V_u(t) = V_{u\infty} \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$\cdot \sqrt{1 + \left[ \left( \frac{V_{u0}}{V_{u\infty}} \right)^2 - 1 \right] e^{-\frac{2t}{\tau}}}$$

$$(72) \quad V_{u\infty} = 1,15 \sqrt{\frac{\beta}{K} \frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

$$(73) \quad \tau = \frac{2 R_2 C}{R_1 + R_2}$$

$$(74) \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

III) *Caso di guadagno non iperbolico del III ordine.*

In questo caso conviene calcolare semplicemente l'ampiezza  $A(t)$  dell'involuppo e si ha:

$$(75) \quad \frac{A_0}{A} \left( \frac{A^2 - A_{\infty}^2}{A_0^2 - A_{\infty}^2} \right) = \frac{K G_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left( K G_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} - 1 \right)}{2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{2 R_1 R_2 C} \left( K G_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} - 1 \right) t} = e$$

oppure, che è lo stesso

$$(76) \quad \left( \frac{A_0}{A_A} \right)^{K G_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} - 1} \left( \frac{A^2 - A_{\infty}^2}{A_0^2 - A_{\infty}^2} \right)^{\frac{K}{2} G_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_1 + R_2}{2 R_1 R_2 C}} = e$$

$$(77) \quad A_0 = 1,5 \sqrt{\frac{1}{\beta K^2} \left( K G_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} - 1 \right)}$$

mentre il tempo di salita va calcolato numericamente come nel corrispondente caso della (33).

La soluzione esatta di questo ultimo caso è data dalla soluzione della

$$(78) \quad \dot{V}_u + \left( p - r K G_0 \frac{1 - \beta K^2 V_u^2}{(1 + \beta K^2 V_u^2)^2} \right) V_u + q V_u = 0$$

che si ottiene dalla (39) ricordando la (12) e dove le notazioni sono le solite. Per quanto sia laborioso è possibile ottenere la soluzione dell'equazione.

Infatti posto

$$t = \tau^* q \frac{1}{2} = \frac{\tau^*}{\omega}; \quad \varepsilon = \frac{p}{\omega}, \quad \alpha = \frac{r K G_0}{p}$$

e 
$$\gamma^2 = \frac{1}{\beta K^2}$$

con facili passaggi si ottiene:

$$(79) \quad \dot{V}_u + \varepsilon \left( 1 + \alpha \frac{V_u^2 - \gamma^2}{(V_u^2 + \gamma^2)^2} \right) V_u + V_u = 0,$$

E nella solita ipotesi che il termine perturbativo sia piccolo usiamo lo stesso metodo approssimato di integrazione che abbiamo visto per esteso al par. 9.

Otteniamo così:

$$(80) \quad \dot{A} = - \frac{\varepsilon}{2 A} \left[ A^2 - 2 \pi \alpha \left( 1 - \frac{\gamma}{\sqrt{A^2 + \gamma^2}} \right) \right]$$

che separando le variabili e ponendo  $\varrho = \sqrt{A^2 + \gamma^2}$  ci dà

$$(81) \quad \int_{\varrho_0}^{\varrho(\tau^*)} \frac{\varrho^2}{(\varrho + r_1)(\varrho + r_2)(\varrho + r_3)} d\varrho = - \frac{\varepsilon}{2} \tau^*$$

con  $r_1, r_2, r_3$  radici dell'equazione:

$$\varrho^3 - (\gamma + 2 \pi \alpha) \varrho + 2 \pi \alpha \gamma = 0$$

che per le ipotesi fatte risultano sempre reali. Si vede subito che la (80) è integrabile e il primo membro è rappresentato da

$$\ln f(A_0, A_{\infty}, A(t)) \quad \text{con} \quad A_{\infty} = f(\gamma, \alpha)$$

mentre il secondo membro è:

$$(82) \quad - \frac{\varepsilon}{2} \tau^* = - \frac{R_1 + R_2}{2 R_1 R_2 C}$$

che è proprio l'esponente che appare a secondo membro della (76).

II. - CASO DI CIRCUITI CON RESISTENZA NEGATIVA.

Come è ben noto, sotto particolari condizioni, un amplificatore connesso tra due punti può essere rimpiazzato con un'opportuna resistenza negativa; inoltre per alcuni circuiti che impiegano semiconduttori, è più conveniente schematizzare l'elemento convertitore della potenza, con una resistenza negativa che è funzione della tensione piuttosto che con un amplificatore. Questa schematizzazione non è una finzione matematica, ma anzi è molto più aderente alla realtà fisica di quanto lo sia l'amplificatore con reazione che la dovrebbe sostituire. Consideriamo il circuito di fig. 14.

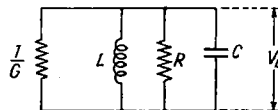


Fig. 14.

Esso è costituito da un elemento risonante in parallelo a una resistenza negativa  $1/G(V_u)$ .

L'equazione di equilibrio per un tale circuito è:

$$(83) \quad \dot{V}_u + \frac{1}{R_2 C} \left( R_2 G + R_2 V \frac{dG}{dV} + 1 \right) V_u + \frac{V}{LC} = 0.$$

Per fare un esempio non ha importanza come  $G$  dipende da  $V_u$  perchè nei casi pratici si assume di volta in volta l'andamento più conveniente. Assumiamo che la conduttanza sia di tipo parabolico e cioè:

$$(84) \quad G(V_u) = -G_0 + K V_u^2.$$

In questo caso la (83) diventa:

$$\dot{V}_u + \frac{1 - R G_0}{R C} \left[ 1 + \frac{3 R K}{1 - R G_0} V_u^2 \right] V_u + \omega^2 V_u = 0$$

con

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

La soluzione approssimata di quest'equazione, sotto le solite ipotesi, è:

$$(86) \quad V_u(t) = \frac{V_{u\infty} \sin(\omega t + \varphi)}{\sqrt{1 + \left[ \left( \frac{V_{u\infty}}{V_{u0}} \right)^2 - 1 \right] e^{-2t/\tau}}}$$

con

$$(87) \quad V_{u\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1 - R G_0}{R K}}$$

e

$$(88) \quad \tau = \frac{2 R C}{1 - R_2 G_0}$$

Si vede che le (86), (87) e (88) sono dello stesso tipo delle (64), (68), (69), (70). Risulta quindi immediata la sostituibilità dell'amplificatore con reazione con una resistenza negativa negli oscillatori e più in generale nei circuiti di scatto.

## 12. - RISULTATI SPERIMENTALI.

Sono state effettuate varie verifiche sperimentali per controllare i risultati numerici ottenuti dalla precedente trattazione. Per brevità riporteremo solo due casi a titolo di esempio.

In fig. 15 è riportato lo schema a blocchi del primo circuito in esame.

Lo schema dell'amplificatore è riportato in fig. 16. Esso è un normale amplificatore RC con larghezza di banda di ~ 1,5 MHz la cui impedenza di ingresso è sufficientemente alta e la cui impedenza d'uscita è  $\rho \approx 100 \Omega$ .

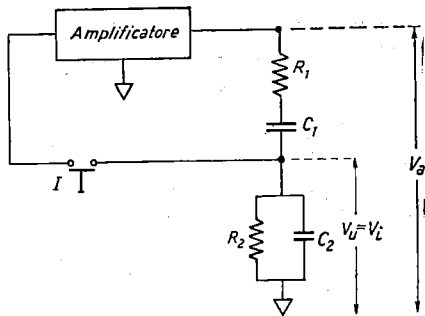


Fig. 15.

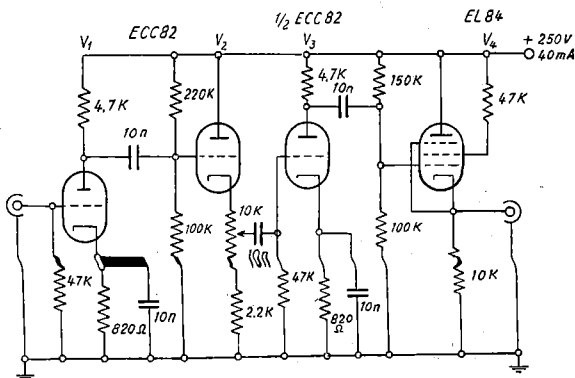


Fig. 16. — Amplificatore RC 1,5 MHz.

La curva di guadagno  $G = G(V_i)$  di detto amplificatore è riportata in fig. 17 ed è stata rilevata a rete passiva sconnessa alla frequenza corrispondente alla frequenza propria dell'autooscillatore.

I parametri della rete passiva sono:

$$R_1 = (970 + 100) = 1070 \Omega \quad R_2 = 101 \Omega$$

$$C_1 = 10^{-9} \text{ F} \quad C_2 = 10^{-8} \text{ F}$$

La frequenza della tensione  $V_u$ , calcolata in base alla (59) è:

$$f = 153 \text{ kHz}$$

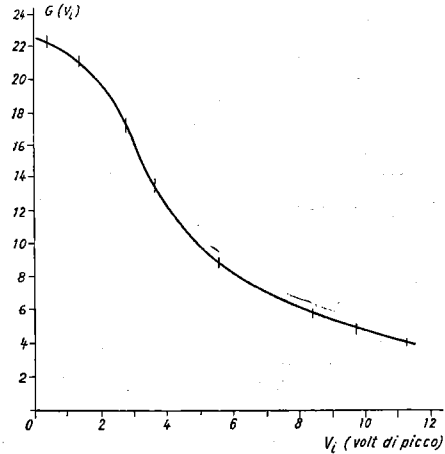


Fig. 17.

mentre quella misurata è:

$$f = 151,5 \text{ kHz}$$

La  $V_{u0}$  misurata quando l'interruttore  $I$  di fig. 15 è aperto è:

$$V_{u0} \approx 4 \text{ mV}$$

Approssimando la curva di guadagno con la retta di equazione

$$(89) \quad G = 22,2 - 1,25 V_i$$

che coincide sufficientemente con la curva data nella zona interessata, si ottiene dalla (57):

$$V_{u\infty} = 0,63 \text{ V (di picco)}$$

mentre dalla (20) ricordando la (58)

$$\Delta t = 0,25 \text{ ms}$$

Dalla fig. 18 a che riproduce una fotografia dell'involuppo della tensione d'uscita  $V_u$  rilevata con un sincro-

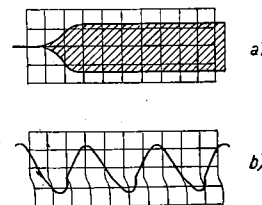


Fig. 18 a). — Verticale 0,5 V/cm. Orizzontale 0,2 ms/cm.  
b). — Verticale 0,5 V/cm. Orizzontale 2 μs/cm.

scopio Tektronix 541 quando l'interruttore  $I$  viene chiuso, si rileva:

$$V_{u\infty} \approx 0,65 \text{ V (di picco)}$$

$$\Delta t \approx 0,3 \text{ ms}$$

mentre la fig. 18 b che riproduce la stessa sinusoide, ma su scala più espansa ci assicura che si tratta di una forma sinusoidale.

Un altro esempio è ricavato dall'oscillatore con circuito LC dato in fig. 19.

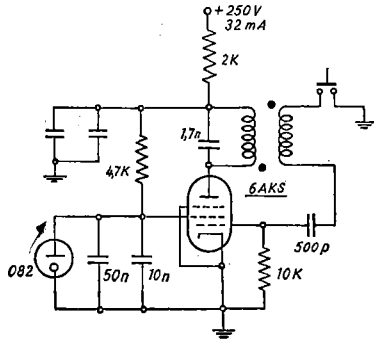


Fig. 19.

L'impulsamento è dato aprendo e chiudendo il circuito di reazione con un relais a mercurio.

La curva di guadagno misurata con il circuito oscillante connesso alla valvola è riportata in fig. 20, assieme all'andamento di  $1/K$ .

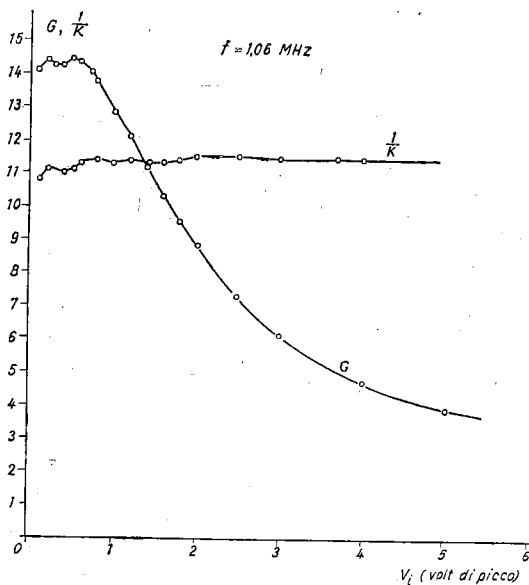


Fig. 20. — Guadagno amplificatore con anodo accordato.

La frequenza di oscillazione propria del circuito oscillante è di  $F = 1,05$  MHz, la capacità totale è  $1700$  pF.

La resistenza parallela, misurata a questa frequenza, vale  $3000 \Omega$ . Inoltre  $V_{20} \approx 0,5$  V (di picco).

Riassumendo, con le solite notazioni, i parametri indipendenti sono:

$$R_1 = 5 \times 10^2 \Omega \quad (\text{resistenza di placca della valvola})$$

$$R_2 = 3000 \Omega \quad (\text{resistenza dinamica del circuito oscillante})$$

$$C_{\Sigma} = 1700 \text{ pF} \quad (\text{capacità totale di uscita})$$

$$K = \frac{1}{11,5} \quad (\text{come risulta dalla misura diretta})$$

Risalendo dalla curva di guadagno misurata a quella

dell'amplificatore ideale si trova che la zona di lavoro è bene interpretata dalla retta di equazione

$$(90) \quad G = 3400 - 1050 V_i$$

In base a questi parametri della (60) si ha:

$$V_{\infty} = 21 \text{ V (di picco)}$$

e dalla (20) ricordando la (61)

$$\Delta t = 66 \mu\text{s}.$$

In fig. 21 a che riproduce l'involuppo della tensione di uscita rilevato al sincroscopio Tek 541 si può rilevare che:

$$V_u = \sim 21,5 \text{ V}, \Delta t = \sim 63 \mu\text{s}.$$

In fig. 21 b è riprodotto lo stesso oscillogramma su scala più espansa per verificare che la forma d'onda della tensione in uscita è sinusoidale.

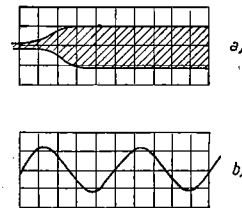


Fig. 21 a). — Verticale 20 Volt/cm. Orizzontale 20  $\mu\text{sec/cm}$ .  
b). — Verticale 20 Volt/cm. Orizzontale 0,2  $\mu\text{sec/cm}$ .

#### CONCLUSIONI.

Come mostrano le verifiche sperimentali la teoria svolta interpreta bene l'andamento dei fenomeni anche nei casi pratici.

La forma della caratteristica del guadagno definisce univocamente l'andamento nel tempo dell'ampiezza e della pulsazione.

Il modo con il quale la curva di guadagno traversa il punto per il quale il guadagno di maglia è unitario definisce la forma del ginocchio superiore della funzione ampiezza e la stabilità di frequenza dell'autooscillatore.

La banda passante dell'amplificatore reale che fa parte dell'autooscillatore (l'amplificatore è peraltro sempre caricato dalla rete passiva) deve essere compatibile con il tempo di salita della funzione ampiezza se si vuole rimanere nei limiti di validità della teoria.

Errori nella valutazione della banda passante in sistemi con forte reazione portano a ritenere possibile l'istaurarsi del regime sinusoidale dove si hanno invece oscillazioni di rilassamento. Questo fatto è evidente quando si pensi che il passaggio dalle oscillazioni sinusoidali a quelle di rilassamento è dato dalla grandezza del coefficiente  $\xi$  che può considerarsi grossolanamente uguale al rapporto tra il guadagno iniziale e la pulsazione della grandezza in questione. Perciò il possibile valore di  $\omega$  influenza notevolmente il parametro  $\xi$  ed indica quindi il tipo di fenomeno da considerare.

In tutta la trattazione non si tiene conto degli effetti reattivi dovuti all'amplificatore. Infatti negli autooscillatori reali il funzionamento della valvola oscillatrice non è mai disgiunto dal funzionamento come tubo di reattanza. Questa però non è una grave lacuna in quanto il modo di funzionare anzidetto interviene solo quantitativamente nei complessi fenomeni.

Piccoli ritocchi nella teoria esposta la rendono capace di interpretare anche i complessi fenomeni che si manifestano negli autooscillatori a regime intermittente dove il regime sinusoidale è sovrapposto al regime di oscillazioni di rilassamento.

Per questo però rimandiamo ad un lavoro successivo in quanto questi fenomeni possono essere trattati analiticamente solo introducendo una nuova grandezza: il ritardo apparente dell'amplificatore.

Gli Autori desiderano ringraziare vivamente il dr. C. Infante per alcune discussioni su tutto l'argomento e la dr. M. G. Trigila Cao del gruppo « calcoli numerici » dei Laboratori di Frascati per la sua collaborazione.

Particolarmente importante è stato il lavoro svolto dal sig. M. Fascetti per eseguire le numerosissime verifiche sperimentali dei risultati teorici.

*Manoscritto pervenuto il 30 gennaio 1962.*

BIBLIOGRAFIA

- [1] *Proceeding of the Symposium on nonlinear circuit analysis.* Interscience Publ., N.Y., 1957, pag. 448 e seg.
- [2] D. GRAFFI: *Oscillazioni non lineari.* - G. Laterza, Bari, 1954.
- [3] N. W. MC LACHLAN: *Ordinary non linear differential equation.* - Clarendon Press, Oxford, 1956.
- [4] D. E. CLACK, H. J. MEAD: *Electronic, Radio and Microwave physics.* - Heywood, London, 1961, pag. 370 e seguito.
- [5] C. INFANTE, F. PANDARESE: *The tunnel diode as threshold device: theory and application.* Proceedings 1961. Belgrade conference on Nuclear Electronics (to be published).
- [6] VAN DER POL: *Non linear theory of electric oscillations.* « Proc. Inst. Radio Eng. », XX, 1051 (1934).